ЛР Образовательный Центр “Лучшее Решение”
www.лучшеерешение.рф

Подготовка учащихся 11 классов

к решению задач повышенной сложности

на уроке математики

Автор: Астрахарчик Нина Алексеевна
учитель математики
МОУ «Лицей города Троицка»,
г. Москва.

Аннотация: *Урок рассчитан на учащихся 11 профильных классов. В результате проведения диагностических работ в форме ЕГЭ, выяснилось, что лишь незначительное число учащихся профильных классов приступает к решению задачи №21 (задача с параметром) из задания ЕГЭ по математике. Задача с параметром считается самой трудной в задании, т.к. является не стандартной. Для ее решения необходимо комплексное применение полученных знаний. Объективно учащиеся смогли бы ее решить, если бы не испытывали чувства неуверенности, если не сказать страха.*

Цели занятия.

- *Развитие исследовательских навыков у учащихся при поиске рационального пути решения, умения самостоятельно в комплексе применять знания, умения и навыки, осуществлять их перенос в новые условия.*

- *Привить понимание того, что при решении задач с параметром возможны различные подходы, которыми они владеют (графические, аналитические), что дает дополнительные возможности при сдаче ЕГЭ по математике.*

- *Развивать навыки самоконтроля и самопроверки.*

- *Контролировать время выполнения задания.*

- *Психологически подготовить учащихся к решению нестандартных задач с параметром на экзамене (создание ситуации успеха).*

Описание целевой группы.

Занятия предназначено для учащихся 11-х классов. Занятие по подготовке к сдаче ЕГЭ по математике проводится в рамках изучения курса математики по подготовке к ЕГЭ. Курс предназначен для профильного класса.. Решаются задачи повышенной сложности с развернутым ответом, где очень важно не только знание изученного материала, но и умение самостоятельно принимать решение по выбору метода решения, распределению времени, умение контролировать свои действия. Именно поэтому элементы психологических тренингов должны быть вкраплены ***во все*** *уроки данного курса. Занятия посещают как учащиеся классов с профильной подготовкой по предмету, так и учащиеся общеобразовательных классов, выбравшие профильный экзамен по математике.*

Тип урока: *Комплексное применение знаний, умений и навыков.*

Задачи урока:

1. *Подготовиться психологически к решению задач с параметром – формирование понимания у учащихся, что преимущество данной задачи в возможности применения различных методов ее решения.*
2. *Выбор различных стратегий решения задачи для учащихся с различными типами мышления.*
3. *Научиться распознавать тип задания.*
4. *Выработка умений самостоятельно выбрать те разделы математики, которые могут быть использованы.*
5. *Уметь «держать в голове» основную стратегию решения задачи и не упускать «мелочи» - вычислительные действия, правила оформления работы.*

6. *Научиться распознавать системы уравнений, симметричные относительно знака переменной.*
7. *Научиться анализировать систему уравнений на возможность применения аналитического и графического метода решений.*
8. *Научиться оценивать время решения задачи различными методами.*

Воспроизведение и корректировка умений и навыков для творческого решения задач

Формы работы – индивидуальная, коллективная. Повторяются основные математические понятия, необходимые для применения метода решения.

1. Решением системы уравнений с двумя неизвестными являются пары чисел.
2. Пара чисел интерпретируется точкой на координатной плоскости.

Подготовка к комплексному применению знаний.

Учитель вводит понятие системы уравнений симметричной относительно знака переменной, и предлагает определить относительно какой переменной данная система симметрична.

1. $\begin{cases} |x| + y = 3 \\ x^2 + y = 6 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} |-x| + y = 3 \\ (-x)^2 + y = 6 \end{cases}$

- система симметрична относительно знака *x*.

2. $\begin{cases} y^4 - x = 1 \\ y^4 + x = 4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} (-y)^4 - x = 1 \\ (-y)^4 + x = 4 \end{cases}$

- система симметрична относительно знака у.

3. $\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} |-x| + |-y| = 3 \\ (-x)^2 + (-y)^2 = 6 \end{cases}$

- система симметрична относительно знака *x и y.*

Для объяснения используется доска, презентация. Учащимся раздаются задания на бумажных носителях.

Коллективное обсуждение расположения корней уравнений на координатной плоскости применительно к вышеуказанным системам уравнений.

Предлагается учащимся сделать аналитическую и графическую интерпретацию.

При этом происходит явное распределение учащихся по группам тяготеющим к аналитическому (логическому) и графическому (визуальному) методам решения.

Самостоятельная работа по комплексному применению ЗУН на всех уровнях.

Учитель проводит сравнительный анализ аналитического и графического методов решений задачи применительно к данной системе уравнений. Проводиться совместно с учащимися анализ системы: симметричность системы относительно знаков обеих переменных. Рассматривается аналитический метод решения.

Задача 1. При каких значениях *a*, система уравнений

$$\begin{cases} |y| = x^2 - 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = a & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Решение:

Система симметрична относительно знаков *x* и *y*. Пусть $(x_0; y_0)$ - решение системы.

Тогда $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ - тоже решения системы. Итого – четыре решения. Для того. Чтобы система имела два решения необходимо, чтобы либо x_0, либо y_0 были равны 0. Из уравнения (1) следует, что $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2$ и

$x \neq 0$. Тогда единственно возможный случай, когда $y_0 = 0$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \\ x^2 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x_0 = 2 \text{ или } x_0 = -2 \\ a = 4 \end{cases}$$

Таким образом, $a = 4$ может удовлетворять условию задачи. При этом $(2;0), (-2;0)$ - решения системы. Выше изложенные условия являются необходимыми для того чтобы система имела два решения, но недостаточными. Проверим не существуют ли другие решения системы при $a = 4$.

$$\begin{cases} x^2 - |y^2| = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2). Получим $y^2 + |y| = 0$,

Имеем одно решение $y = 0$. Тогда x = -2 и x = 2, т.е. система имеет два решения (-2;0), (2;0).

Ответ: $a = 4$.

Обсуждается совместно с учащимися возможность графического решения системы уравнений. Выбирается графический метод решения.

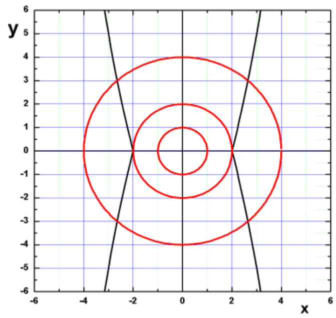

Рис.1

На рисунке 1 второе уравнение представляет собой семейство окружностей с центром в начале координат радиусом $\sqrt{a}$. Очевидно, что при $a \le 0$ решений нет. Первое уравнение – две полупараболы, симметричные относительно оси абсцисс . Нас интересует случай, когда y в первом уравнении равен 0. При этом $|x| = 2$, а $a = 4$.

Обобщение и систематизация знаний и способов выполнения работы.

Учитель проводит сравнительный анализ аналитического и графического методов решений системы уравнений. Учащиеся обсуждают достоинства каждого метода.

Делается вывод: оба подхода к решению системы достаточно эффективны.

Контроль и самоконтроль на основе выполнения задач № 2 и № 3.

Задача 2. При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} x - 2b = y^2 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно три решения? Найдите эти решения.

Решение:

Система симметрична относительно знака y. Если $(x_0; y_0)$ - решение системы, то и $(x_0; -y_0)$ - решение системы. Следовательно, необходимо существование решения $(x_0; 0)$.

$$\begin{cases} x - 2b = 0 \\ x^2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2b \\ 4b^2 = 16 \end{cases}$$

Отсюда $b^2 = 16$; $b = -2$; $b = 2$.

Проверим достаточность при $b = -2$:

$$\begin{cases} x + 4 = y^2 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 16 \; (2) \end{cases}$$

Исключив y^2 из (2), получим

$$x^2 + x + 4 = 16,\ x^2 + x - 12 = 0,\ x_1 = -4, x_2 = 3.$$

$$y^2 = x + 4 = -4 + 4 = 0, y = 0,$$

$$y^2 = 3 + 4 = 7, y_1 = -\sqrt{7}; y_2 = \sqrt{7}.$$

Итак, при $b = -2$ имеем три решения системы уравнений: $(-4;0), (3;-\sqrt{7}), (3;\sqrt{7})$.

Проверим достаточность при $b = 2$:

$$\begin{cases} x - 4 = y^2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 16 & (2) \end{cases}$$

$x^2 + x - 4 = 16,\ x^2 + x - 20 = 0,\ x_1 = -5, x_2 = 4.$

$y^2 = x - 4;\ y_1^2 = 5 - 4 = -9.$ Решений нет.

$y_2^2 = 4 - 4 = 0$ В данном случае имеем одно решение системы уравнений $(4;0)$, что не удовлетворяет условию задачи. Ответ: $b = -2$, $(-4;0), (3;-\sqrt{7}), (3;\sqrt{7})$.

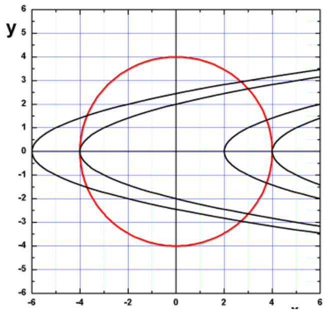

Рис. 2

Из рисунка видно, что три решения система имеет, когда вершина параболы касается окружности изнутри. При этом $y = 0, x = -4, b = -2.$

Задача 3 . При каких значениях *a,* система уравнений

$$\begin{cases} \left||x| - y\right| = a^2 & (1) \\ x^2 + |y| = y^2 - a & (2) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений?

Решается самостоятельно. Далее обсуждение методов решения, которые использовались при решении данного задания.

Решение:

Система симметрична относительно знака *x*. Следовательно, необходимо существование решения $(0; y_0)$.

$$\begin{cases} |y| = a^2 \\ |y| = y^2 - a \end{cases}$$

Система, симметрична относительно знака у. Значит, есть решение вида $(a;0)$.

Если у=0, то и а=0.

Проверяем достаточность:

$$\begin{cases} \left||x| - y\right| = 0 \\ x^2 + |y| = y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left||x| - y\right| = 0 \\ x^2 + |y| = y^2 \end{cases}$$

Отсюда $|x| = y; y^2 + |y| = y^2; |y = 0|$

Итак, имеем одно решение системы (0;0). Ответ: а=0.

Домашнее задание.

Задание выдается учащимся на бумажных носителях.

Задача 4. При каких значениях *a* система уравнений

$$\begin{cases} |x| + y^2 + 2y - 7 = a & (1) \\ x^2 + |y + 1| - 2 = a & (2) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений?

Система симметрична относительно знака x. Следовательно, для существования нечетного числа решений необходимо, чтобы $x = 0$.

Решение:

Система симметрична относительно знака *x*. Следовательно, для существования нечетного числа решений необходимо, чтобы $x=0$.

$$\begin{cases} y^2 + 2y \ \ - 7 = a \\ |y + 1| - 2 = a \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$y^2 + 2y - 7 - |y + 1| + 2 = 0$$

а) при $y \geq -1$

$$y^2 + 2y - 7 - y - 1 + 2 = 0$$

$y^2 + y - 6 = 0$, $y = -3;2$ y= -3 не подходит, y= 2. Тогда а=1.

б) при $y < -1$

$y^2 + 2y + y + 1 - 5 = 0$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

y = - 4, y= 1.Тогда а =1.

Итак, возможны два случая: *y* = 2, *a = 1*, *y* = - 4, *a* =1.

Проверяем достаточность:

$\begin{cases} |x| + 4 + 4 - 7 = 1 \\ x^2 + 3 - 2 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} |x| = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} |x| + 16 - 8 - 7 = 1 \\ x^2 + 3 - 2 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} |x| = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$.

Ответ: Система не может иметь нечетного числа решений.

Литература.

1. Публикация. Астрахарчик Н.А. Астрахарчик Г.Е. Виноградов М.С.
«Графический метод решения систем уравнений».
Материалы XXI Международной конференции» Применение Новых технологий в образовании». 28 – 29 июня 2010 г. Троицк.
Статья размещена в интернете. www.bytic.ru/cue/2010/conf_2010_tez.doc

2. Астрахарчик Н.А.
«Аналитический и численный методы решения систем уравнений с параметром». Фестиваль педагогических идей «Открытый урок»2011/2012 Сборник тезисов. Издательство «Первое сентября». Сертификат к диплому №100-387-090/ОУ- 9 .
Статья размещена в интернете: http://festival.1september.ru

3. Астрахарчик Н.А. Презентация для конкурса «Презентация к уроку». Всероссийский фестиваль педагогических идей « Открытый урок». 2011-2012. «Издательский дом «Первое сентября».
Презентация размещена http://festival.1september.ru/articles/604717/
За презентацию получен диплом лауреата конкурса.
4. Зубов А.Б. Использование симметрии при анализе систем с параметром. “Математика в школе”. №2/2002